**שיטת השוואת המקדמים לפתורן מערכות משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון**

נתונה מערכת  משוואות דיפרנציאליות





נסמן  אופרטור גזירה. המשוואה הנ"ל תהיה

.

נזכיר שהמערכת



נקראת ההומוגנית המתאימה למערכת 

נשתמש בתת-מרחבים אינווריאנטיים על מנת למצוא פתרון פרטי של המערכת.

תזכורת: תת-מרחב  של מרחב מסוים נקרא אינווריאנטי ביחס לאופרטור  אם עבור כל ווקטור  מתקיים  (ניתן לכתוב את זה ).

דוגמה. תתי-מרחבים ממימד סופי, אינווריאנטיים ביחס ל-  במרחב של כל פונקציות גזירות:

 כך ש-  קבועים נתונים, , פולינומים כלשהם עד מעלה .

טענה. נתונה מערכת  משוואות דיפרנציאליות . יהי  תת-מרחב ממימד סופי, אינווריאנטי ביחס ל- וביחס לכפל במטריצה  כך ש-.



אם , כאשר הוא אוסף הפתרונות של המערכת (2), אזי קיים  שפותר את .

הוכחה. נסמן ב- את הצמצום של האופרטור הלינארי  לתת-מרחב: . מכיוון ש- הוא תת-מרחב אינווריאנטי, מתקיים . יתר על כן,  הוא חד-חד ערכי, שהרי

.

לכן

.

מכיוון ש-, קיים  שפותר את .

דוגמה 1. פתור מערכת  כאשר  ו- .



פתרון. פתרון של המשוואה ההומוגנית: .

היות ו- ניתן לבחור תת-מרחב אינווריאנטי  עבור קבוע  כלשהו. ברור ש- ו-  אינווריאנטי ביחס ל- וביחס לכפל במטריצה  כי  הוא וקטור עצמי של המטריצה. כמו כן .לכן נחפש . הצבה במשוואה נותנת , ולכן  ו-.



דוגמה 2. פתור מערכת  כאשר  ו- .



פתרון. פתרון של המשוואה ההומוגנית: .

היות ו-  ניתן לבחור תת-מרחב אינווריאנטי:  עבור קבועים  כלשהם. ברור ש- ו-  אינווריאנטי ביחס ל- וביחס לכפל במטריצה . כמו כן . לכן נחפש . הצבה במשוואה תיתן: ומערכת משוואות  שפתרונה  ואז .



ניתן להשתמש לפעמים בשיטה זו כאשר .

דוגמה 3. פתור מערכת  כאשר  ו-  .



פתרון. פתרון של המשווה ההומוגנית: .

היות ו- , ו-  אזי . אבל ניתן לבחור תת-מרחב אינווריאנטי  עבור קבועים  כלשהם שמקיים .



המרחב אינווריאנטי ביחס ל- וביחס לכפל במטריצה  כי  הוא וקטור עצמי של המטריצה הזו. ניתן להניח ש- , כי איברים עם  הם פתרון של בעיה הומוגנית. לכן נחפש . הצבה במשוואה נותנת . ולכן  ואז.



דוגמה 4 . פתור מערכת  כאשר  ו- .



פתרון. פתרון של המשווה ההומוגנית: .

היות ו-, אם  אזי . אם נחפש , אז ההצבה במשוואה נותנת  שאין לזה פתרון. גם הכפלה של  ב-  לא פותרת את הבעיה. לכן במקרה הזה צריך להשתמש בשיטת השתנות פרמטרים.

